**Метод оценок для решения уравнений и неравенств.**

Метод оценок - нестандартный метод решения уравнений и неравенств, который часто встречается при решении некоторых заданий школьных и вузовских олимпиад, а также заданий из ЕГЭ (в основном, в части С) и поэтому незаслуженно обделен вниманием школы.

Основная идея метода оценок состоит в том, чтобы найти мажоранту (миноранту) данной функции. Мажорантой (минорантой) данной функции *f(x)* на заданном промежутке называется такое число *M*, что или *f(x)* ≤ *M* для всех x из данного промежутка, или *f(x)* *≥ M* для всех x из данного промежутка. Само слово мажоранта (миноранта) происходит от французского majorer (minorer), что в переводе означает «объявлять большим (меньшим)».

Пусть мы имеем уравнение или неравенство и существует такое число *M*, что для любого *x* из области определения данных функций выполняется и (обращаем внимание на то, что меньшая функция () должна быть мажоранты (миноранты), а большая функция () должна быть мажоранты). Тогда исходное уравнение (неравенство) равносильно системе неравенств:

*,*

что равносильно системе: *.*

Уравнения и неравенства решаются совершенно одинаково, главное в подобных задачах - увидеть наличие мажоранты (миноранты). Можно предположить, что метод оценки используется, если:

1. нам задано смешанное уравнение (или неравенство), т.е. в задании есть разнородные функции;
2. входящие в уравнение (неравенство) функции имеют сложный, трехэтажный или пугающий вид;
3. в одной части уравнения (неравенства) стоят ограниченные функции, а в другой вполне конкретные числа;
4. переменных в задании больше, чем уравнений или неравенств.

Метод оценки требует умения оперировать такими понятиями как: функция и ее свойства (монотонность, ограниченность, экстремумы и др.), производная, среднее арифметическое, среднее геометрическое, а также знания некоторых нестандартных неравенств и математических тождеств.

Применение метода оценки значительно сокращает и упрощает решение задач, рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Решить уравнение:

Оценим каждую часть уравнения:

Получаем следующую систему: или

Используя единичную окружность, получаем следующее решение уравнения

Ответ:

Пример 2. Решить уравнение:

Оценим каждую часть уравнения:

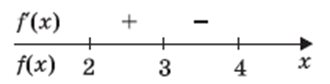
Найдем область определения :

Далее найдем мажоранту с помощью производной:

Область определения

Найдем критические точки

Так как - критическая точка . Функция в левой части уравнения непрерывна и монотонна на отрезке и имеет на этом отрезке единственный экстремум. В нашем случае



Оценим правую часть уравнения, выделяя полный квадрат:

: Т.е. решением уравнения будет число

Ответ:

Заметим, что несмотря на то, что способ нахождения наибольшего и наименьшего значений с помощью производной достаточно громоздкий, иногда он бывает единственно возможным. Поэтому владеть им необходимо и полезно.

Пример 3. Найти множество значений функции:

.

Применим метод мажорант, т.е. метод оценки. Для этого, используя основные свойства тригонометрических функций, преобразуем аргумент арккосинуса и оценим получившуюся функцию:

Так как функция монотонно убывающая на всей своей области определения, то навешивая арккосинус на последнее неравенство, знак неравенства меняем на противоположный:

Ответ:

Пример 4. Решите неравенство:

Найдем область допустимых значений переменной

.

Оценим каждую часть неравенства

Исходное неравенство возможно только в том случае, когда обе части неравенства равны 4, т.е. данное неравенство равносильно системе уравнений:

Ответ:

Пример 5. Решите неравенство:

Так как то разделим обе части неравенства на это выражение и получим равносильное неравенство:

В такой форме удобно оценить обе части неравенства, используя простейшие свойства входящих функций:

Получаем равносильную систему уравнений:

Ответ:

Пример 6. При каких значениях параметра неравенство

верно для всех значений ?

Пусть и тогда

Оценим каждую функцию, предварительно преобразуя данные выражения.

В результате исходное неравенство принимает вид: Далее решаем левое неравенство:

Ответ:

Пример 7. Найдите все значения параметра , при каждом из которых неравенство

не имеет решений.

В данном примере оценим сначала выражения в скобках и

*.*

Для оценки используем неравенство Коши или , полагая, что

,

т.к. , то

Возвращаемся к исходному неравенству или по условию это неравенство должно быть ложно для всех что возможно тогда и только тогда, когда

Ответ:

Пример 8. Решите неравенство:

При решении данного неравенства удобно использовать классическое неравенство Коши, известное школьникам как неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

причем равенство достигается только в том случае, когда

Преобразуем левую часть данного неравенства, рассматривая второе слагаемое как сумму 2010 дробей , а всю левую часть как сумму из 2011 слагаемых, которую (используя неравенство Коши) заменим на среднее геометрическое:

В результате получаем следующее равносильно неравенство:

=>

Поскольку равенство среднего геометрического и среднего арифметического возможно только при равенстве входящих элементов, то получаем:

Решение единственное, так как во всех других случаях, кроме левая часть исходного неравенства будет больше 2011.

Ответ:

Приведенные примеры показывают, что метод оценки не требует специфической подготовки и каких-то особенных навыков, но зато требует умения обобщать и анализировать. Применение этого метода может быть полезно не только для школьников, но и для студентов ВУЗов различных специальностей.